

Polygone und deren geometrische Bedeutung

Name	Johannes Baischer
Matrikelnummer	12127340
E-Mail-Adresse	Johannes.Baischer@stud.plus.ac.at
Unterrichtsfächer	Informatik-Mathematik

Inhaltsverzeichnis

VORWORT	II
FACHLICHE BEARBEITUNG DES THEMAS	1
POLYGONE – ALLGEMEIN	1
KLASSIFIZIERUNG	1
TRIANGULIEREN EINES VIELECKS	2
ANWENDUNGEN VON TRIANGULIERUNGEN	3
POLYGONE – REGELMÄßIG	4
KONSTRUKTION	4
„REGELMÄßIGE“ POLYGONE IM RAUM	5
STERNVIELECKE	6
PARKETTIERUNG – „TILING THE PLANE“	7
FACHDIDAKTISCHE BEARBEITUNG DES THEMAS	11
THEMA MIT LEHRPLANBEZUG	11
BESCHREIBUNG DES THEMAS FÜR DEN SCHULUNTERRICHT	11
BEZUG AUF LEHRPLANINHALTE	12
FACHDIDAKTISCHE BEGRÜNDUNG DES THEMAS	12
GRUNDBILDUNGSASPEKTE UND LERNZIELE	13
ANGESTREBTE KOMPETENZEN	14
BERÜCKSICHTIGUNG LERNAUSGANGSLAGE	15
LEISTUNGSSTAND	15
VORKENNTNISSE	15
WEITERE ÜBERLEGUNGEN	16
UNTERRICHTSPLANUNG	17
EINORDNUNG INS SCHULJAHR	17
AUSBlick AUF FOLGENDE LEHRINHALTE	17
RASTERPLANUNG	17
ZUSAMMENFASSUNG	19
ABBILDUNGSVERZEICHNIS	i
TABELLENVERZEICHNIS	i
LITERATURVERZEICHNIS	ii
ANHANG	iv
A1 - GRUNDAUFGABEN	iv
A2 – ERWEITERUNGSAUFGABEN	vi

Vorwort

Die elementare Geometrie der Polygone ist ein essentieller Bereich sowohl im Mathematikunterricht, als auch des Geometrischen Zeichnens, der die Grundlagen der geometrischen Formen und deren Eigenschaften vermittelt. Bei den Schülerinnen und Schülern werden hier Vorkenntnisse vorausgesetzt bezüglich Strecken, Winkeln und Maßen und weiters darauf aufbauend zu Dreiecken und Vierecken. Diese Vorkenntnisse sind notwendig, um die neuen Inhalte verstehen und einordnen zu können.

In dieser Arbeit werden Themen behandelt wie die Flächenberechnungen von Polygonen als zusammengesetzte Figuren - diese Idee ist Voraussetzung für Themen der Oberstufe wie z.B. die Integralrechnung, Allgemeine Polygone und deren (im Schulunterricht nicht so sehr behandelte) Spezialfälle und höhere Konzepte wie die unendliche Paketierung („Infinite Tiling of the plane“).

Im Folgenden werden diese Themen detaillierter betrachtet und fachlich sowie fachdidaktisch aufgearbeitet. Des Weiteren werden die Lernziele und die Lernausgangslage der Schülerinnen und Schüler sowie weitere Rahmenbedingungen betrachtet. Abschließen will ich einen praxisbezogenen Ausblick in Form einer thematischen Stundenplanung und Einordnung in das Schuljahr geben.

(Polygon, Sternvieleck, Triangulierung, Penrose-Kachelung)

Fachliche Bearbeitung des Themas

Einfach gesagt sind Polygone geometrische Figuren mit geraden Seiten und Winkeln zwischen diesen. Allgemein könnte man jeden geschlossenen Streckenzug, der aus mindestens 3 Strecken (bzw. 3 Eckpunkten) besteht, als Polygon bezeichnen. Weitere Unterteilungen kann man aufgrund der Regelmäßigkeiten der Seiten oder bestimmten Einschränkungen bezüglich der Seiten und Winkel definieren. Polygone werden dabei vorrangig nach der Anzahl ihrer Ecken klassifiziert, wobei die einfachsten Polygone Dreiecke und Vierecke sind mit, wie der Name schon sagt, jeweils drei bzw. vier Ecken. In der Mathematik wurden historisch und auch jetzt noch immer, vor allem regelmäßige Polygone betrachtet und analysiert, da diese sich in den meisten Fällen durch bspw. Symmetrieeigenschaften besser verhalten. Einige der Inhalte eignen sich offensichtlich nicht für den Schulunterricht in einer Unterstufe aufgrund der Komplexität der Themen und der streng bemessenen Zeit, nichts desto trotz sind sie eine inhaltliche Auseinandersetzung im Rahmen dieser Arbeit wert.

Polygone - Allgemein

Klassifizierung

Polygone können auf verschiedene Arten klassifiziert werden. Eine Möglichkeit ist die Klassifizierung anhand der Länge der Seiten. Daraus abgeleitet spricht man bei gleich langen Seiten von regelmäßigen Polygonen, und unregelmäßigen Polygonen, wenn zumindest eine der Seiten eine andere Länge hat als der Rest, dennoch können verschiedenste Symmetrien auftreten. Eine weitere Möglichkeit ist die Klassifizierung anhand der Größe der Winkel. Hierunter fallen beispielsweise konvexe Polygone, bei denen alle Winkel kleiner als 180° sind, und konkave Polygone, bei denen es wenigstens einen Winkel gibt, der größer als 180° ist. Eine weitere Klassifizierungsmöglichkeit ist die Festlegung, ob sich die Seiten überschneiden dürfen oder nicht, im Deutschen unterscheidet man hier demnach zwischen überschlagenden (=sich überschneidenden) bzw. nicht überschlagenen Polygonen.

Die Klassifizierung von Polygonen sind nicht exklusiv, können also auch in Kombination auftreten. So gibt es beispielsweise regelmäßige konvexe Polygone, bei denen also alle Seiten gleich lang sind und alle Winkel kleiner als 180° sind oder unregelmäßige konkave Polygone, bei denen die Seiten unterschiedliche Längen haben und es wenigstens einen

erhabenen Winkel gibt, also einen Winkel der größer als 180° ist. Es gibt auch gleichwinkelige Polygone, bei denen alle Winkel gleich groß sind, aber die Seiten unterschiedliche Längen haben. Ebenso gibt es gleichseitige Polygone, die aber verschieden große Winkel haben. Man sieht, die Vielzahl von möglichen Konstruktionen verlangt auch nach einer eben so große Zahl an Begriffen, die eingeführt werden müssen, um sich exakt darüber unterhalten zu können.

Überschlagene Polygone werden oft wenig oder gar nicht behandelt, im Schulunterricht meist sogar einfach ausgeschlossen. Diese speziellen Vielecke haben eine enge Verbindung zu ihren nicht-überschlagenen Gegenstücken und sind vor allem in ihrer regelmäßigen Form sehr interessant zu betrachten als sogenannte (regelmäßige) Sternvielecke.

Die Klassifizierung von Polygonen ist in der geometrischen Grundbildung von großer Bedeutung, da sie dazu beiträgt, das Verständnis von geometrischen Figuren und ihren Eigenschaften zu vertiefen.

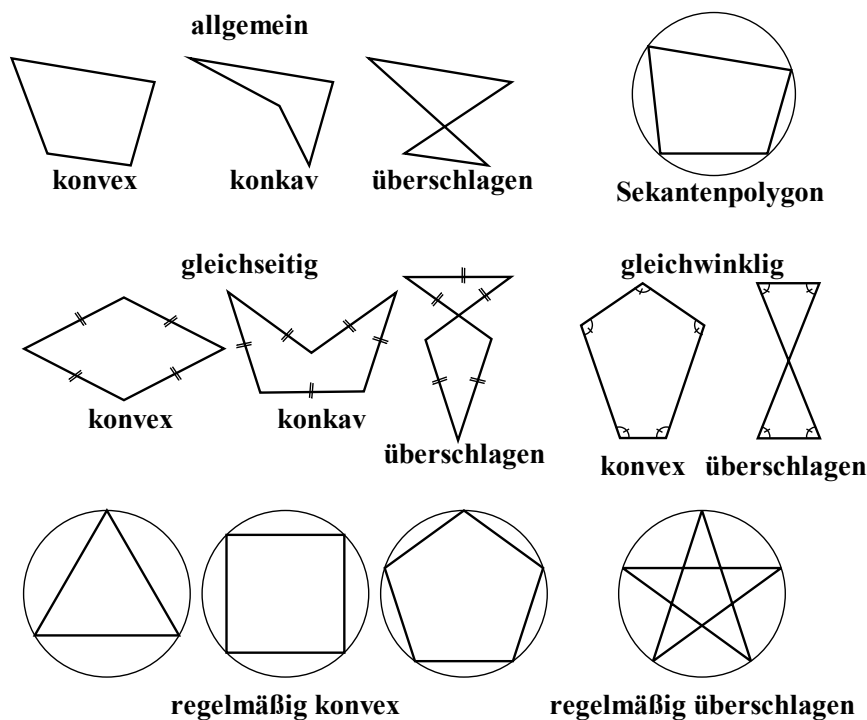


Abbildung 1 Klassifizierung Polygon

Triangulieren eines Vielecks

Bei der Triangulierung eines Vielecks will man ein gegebenes Polygon in kleinere Dreiecke unterteilen, um einfacher damit umgehen zu können. In der Literatur ist dieser Prozess oft auch als sog. „Museumsproblem“ bekannt, da es anschaulich die Idee beschreibt,

ein gegebenes Museum mit Kameras auszustatten, um alles zu überwachen, wobei die Kameras jeweils approximativ maximal eine Dreiecksfläche sehen können. Das so eine Triangulierung möglich ist, kann induktiv begründet werden. Die Idee ist, eine (immer vorhandene) Diagonale zu finden und das Polygon in zwei kleinere Polygone zu teilen, bis man induktiv nurmehr Dreiecke übrig hat. So kann man jedes einfache¹ n-Eck in $n-2$ Dreiecke zerteilen.

Es gibt auch Algorithmen, die auf bestimmte Eigenschaften des Vielecks abzielen, wie zum Beispiel das Vorhandensein von Symmetrie oder das Vorliegen von speziellen Formen Rechtecken oder regelmäßiger Polygone. Optimierungsaufgaben im Bezug auf das Museumsproblem sind in den Computerwissenschaften sehr interessant, da z.B. das Finden der minimalen Anzahl von Kameras nur in Nicht-Polynomieller Zeit gelöst werden kann, dieses Problem zählt zu den sog. NP-Schwer Problemen (Berg, 2008).

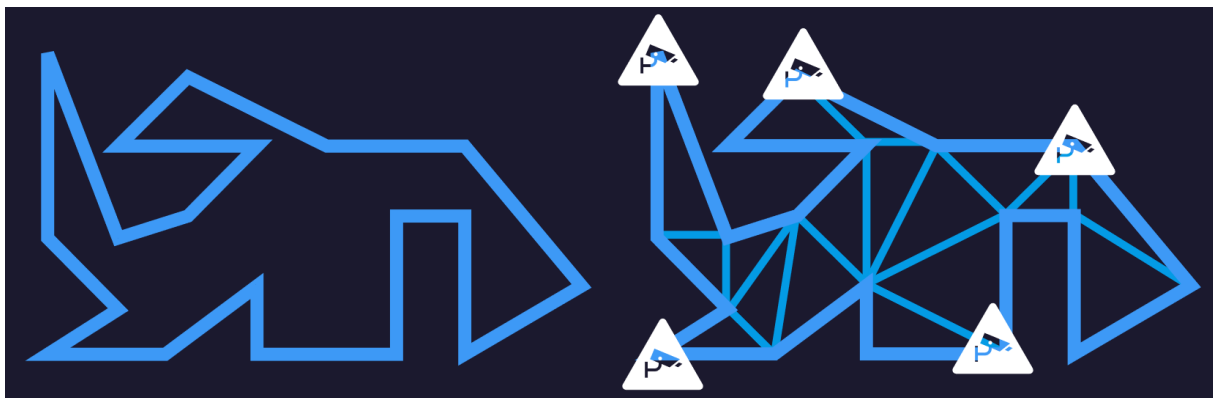


Abbildung 2 Museumswächter Problem

Anwendungen von Triangulierungen

Triangulierungen von Polygonen sind in vielen Bereichen von Nutzen. In der Computergrafik werden sie beispielsweise verwendet, um Flächen zu rastern und zu füllen. In der Geometrie können Triangulierungen dazu verwendet werden, um Flächeninhalte von Polygonen zu berechnen, in der Mechanik werden sie verwendet, um die Stabilität von Strukturen zu analysieren, indem man sie in Dreiecke unterteilt und die Kräfte auf jedes Dreieck verteilt. Triangulierungen finden darüber hinaus in zahlreichen anderen Bereichen Anwendung, wie zum Beispiel in der Verarbeitung von geographischen Daten und in der Berechnung von Distanzen in Netzwerken.

¹ nicht überschlagen und ohne Löcher

Polygone – Regelmäßig

Regelmäßige Polygone sind geometrische Figuren mit Seiten gleicher Länge und Winkel gleicher Größe. Sie können regelmäßige Muster bilden, wenn sie zu einer Ebene gefüllt werden und haben daher auch eine große Bedeutung in der Kunst und Architektur. Hier finden sich auch die geschichtlichen Ursprünge der Geometrie, neben anderen praxisorientierten Gründen, wie z.B. der Feldvermessungen nach den jährlichen Nilüberschwemmungen in Ägypten (Bruder et al., 2015, S. 187–188). Ein bekanntes Beispiel für ein regelmäßiges Polygon ist das Fünfeck, das auch als Pentagon bezeichnet wird und demnach fünf gleich lange Seiten und fünf gleich große Winkel hat. Regelmäßige Vielecke werden aufgrund ihrer guten Eigenschaften sehr oft gegenüber allgemeineren Formen im Schulunterricht bevorzugt.

Konstruktion

Regelmäßige Polygone können auf verschiedenste Weise konstruiert werden. Eine Möglichkeit ist die Verwendung von geraden Linien und Winkelmessern. Dazu werden zunächst zwei Punkte auf dem Papier markiert, die als Anfang und Ende der Seite dienen. Dann wird ein Winkelmesser verwendet, um den Winkel zwischen der dadurch entstandenen Seite und der Geraden, auf der der nächste Eckpunkt liegt entsprechend dem gewünschten Winkelgrad zu markieren. Dieser Vorgang wird für jede Seite des Polygons wiederholt, bis alle Seiten verbunden sind. Historisch war die Konstruktion von regelmäßigen Vielecken alleine mit den in der Antike definierten Grundoperationen (mit Klappzirkel und maßlosem Lineal) für viele Mathematiker sehr interessant und wird auf diese Art manchmal auch im Schulunterricht besprochen. Hierzu gibt es viele Konstruktionsanleitungen und Erkenntnisse darüber, welche Konstruktionen überhaupt möglich sind.

Hier möchte ich, ohne zu tief in andere Felder der Mathematik abzuschweifen, kurz skizzieren, wie wertvoll solche „rein geometrischen“ Überlegungen für die Gesamtheit der Mathematik sind.

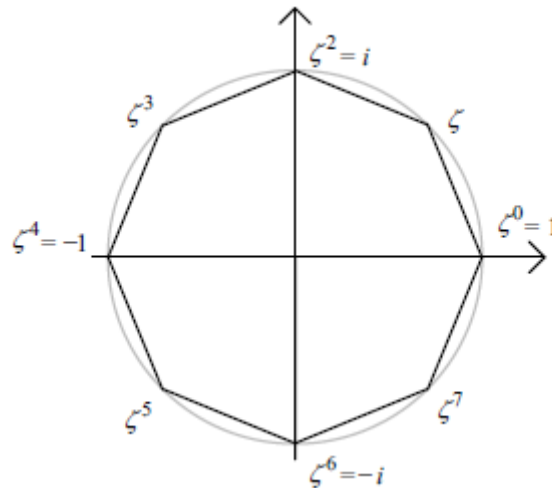


Abbildung 3 Kreisteilung mit Einheitswurzeln

Die obige Abbildung zeigt einen Einheitskreis, in dem ein regelmäßiges Achteck konstruiert wurde. Die Beschriftungen in den Eckpunkten des Achtecks beschreiben die sog. Einheitswurzeln, also die Lösungen für die Gleichung: $x^8 - 1 = 0$.² Hier bewegt man sich scheinbar willkürlich im Raum der „Komplexen Zahlen“.³ Mit diesen Werkzeugen kann man in weiterer Folge zeigen, dass die Konstruktion von regelmäßigen Polygonen eng mit der Lösung von Gleichungen (auch der Möglichkeit quadratische Gleichungen mit Zirkel und Lineal zu lösen) zusammenhängt und daraus folgernd auch warum manche Polygone unmöglich zu zeichnen sind (Bewersdorff, 2019, S. 90–96). All das soll aufzeigen, wie verwoben Geometrie in anderen Feldern der Mathematik ist und weshalb sie ein mächtiges Werkzeug sein kann.

„Regelmäßige“ Polygone im Raum

Als weiterer kleiner Denkanstoß soll die folgende Überlegung dienen: Definiert man ein regelmäßiges Vieleck als geschlossenen Streckenzug mit gleich langen Seiten und gleich großen Winkeln ist man im zweidimensionalen Fall (mit der Unterscheidung ob überschlagen oder nicht) schon sehr gut abgedeckt. Was nun passiert aber, wenn man dies auf den 3D-Raum anwendet. Plötzlich sind Konstrukte wie regelmäßige Sechsecke mit 6 rechten Winkeln eine Möglichkeit (Frank & Schumann, 2019).

² Ähnlich zu, wie $-1, +1$ Lösungen sind zu $x^2 - 1 = 0$

³C.F. Gauß beschäftigte sich unter anderem abstrakt mit der Geometrie in einer seiner Eintragungen „Grundlagen, auf die sich die Teilung des Kreises stützt, und zwar dessen geometrische Teilbarkeit in siebenzehn Teile etc.“

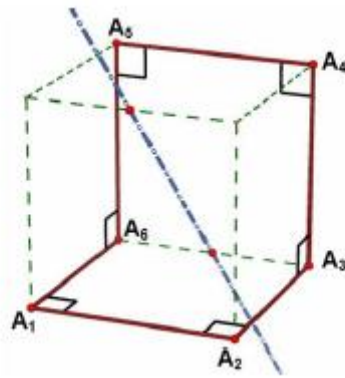


Abbildung 4 3D-Sechseck

Tatsächlich lässt sich so, anders als in 2D, jedes regelmäßige Polygon konstruieren.

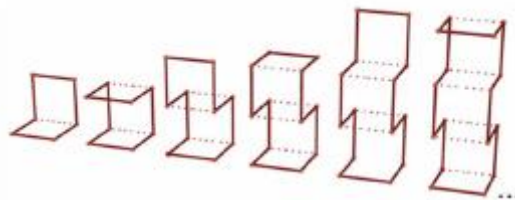


Abbildung 5 Regelmäßige 2k-Polygone

Sternvielecke

Was passiert nun mit Vielecken, wenn man erlaubt, dass sich dessen Seiten gegenseitig überschneiden? Auch hier kann man Regelmäßigkeiten finden in sog. Sternvielecken. Sie kommen, anders als sich nicht überschneidende Vielecke, mit den selben Bestimmungsstücken in verschiedenen Formen vor.

Konstruktion

Eine Möglichkeit, diese Art von Vielecken zu konstruieren, besteht darin, Eckpunkte von regelmäßigen Vielecken nach einer gewissen Vorschrift miteinander zu verbinden. Eine solche Vorschrift kann lauten: „Verbinde einen Eckpunkt des n -Ecks mit dem k -nächsten Eckpunkt im Uhrzeigersinn“ (Strick, 2019, S. 1–7).

Beispielsweise kann man ein fünfeckiges regelmäßiges Sternvieleck konstruieren, indem man Eckpunkte des regulären Fünfeckes nach dieser Vorschrift miteinander verbindet.

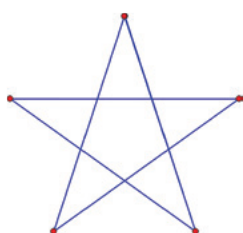


Abbildung 7 Regelmäßiger "Fünfstern"

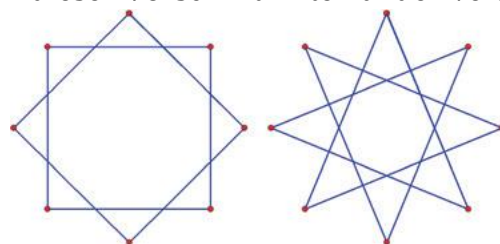


Abbildung 6 Regelmäßige "Achtstern"

Dazu verbindet man zunächst den ersten Eckpunkt mit dem dritten Eckpunkt im Uhrzeigersinn, dann den zweiten Eckpunkt mit dem vierten Eckpunkt, den dritten Eckpunkt mit dem fünften Eckpunkt und so weiter. Durch diese Verbindungen entsteht ein fünfeckiges Sternvieleck. Tatsächlich ist das die einzige Anordnung des sog. „Fünfzacks“, da, wenn man im Abstand von 3 Eckpunkten Seiten zieht, der genau selbe Stern entsteht. Für Sternvielecke mit bspw. 7 oder 8 Eckpunkten entstehen hier mit verschiedenen Vorschriften durchaus verschiedene Vielecke (siehe *Abbildung 6 Regelmäßige "Achtzack"*).

Parkettierung – „Tiling the plane“⁴

Die Parkettierung der Ebene, im Englischen auch als "Tiling the plane" bezeichnet, beschreibt das Bedecken einer Ebene mit wiederkehrenden Mustern aus Polygonen. Dieses Konzept ist in der Computergrafik von großer Bedeutung, da so unendlich generierte Figuren und zusammengesetzte Figuren mit Grafiken bedeckt werden. Es gibt zwei Arten von Parkettierungen: aperiodische (wie z.B. Penrose-Kachelungen) und periodische (manchmal auch regelmäßige) Kachelung.

Regelmäßige Kacheln

Regelmäßige Kacheln verwenden in ihrer einfachsten Form nur eine Art von regelmäßigem Polygon, um ein wiederkehrendes Muster zu erzeugen. Diese Art von Parkettierung ist in der geometrischen Grundbildung besonders wichtig, da sie den Schülerinnen und Schülern dabei hilft, das Konzept der Symmetrie und der periodischen Muster zu verstehen. Regelmäßige Kacheln finden auch Anwendung in der Architektur und Kunst, da sie

⁴ Ich habe dieses Thema schon öfters aufgeschnappt und fand es immer sehr interessant, weshalb ich hier den Rahmen dieser Proseminararbeit nutzen möchte, mich endlich fachlich damit auseinanderzusetzen.

attraktive Muster und Designs ermöglichen. Es gibt tatsächlich nur drei regelmäßige Polygone, die alleine die unendliche Ebene lückenlos füllen können⁵:

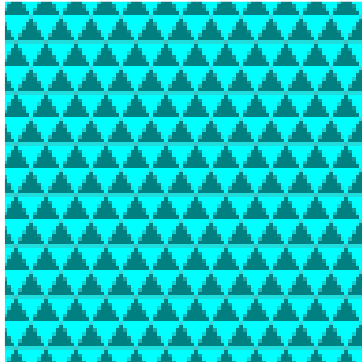


Abbildung 9 Gleichseitige Dreiecks-kachelung

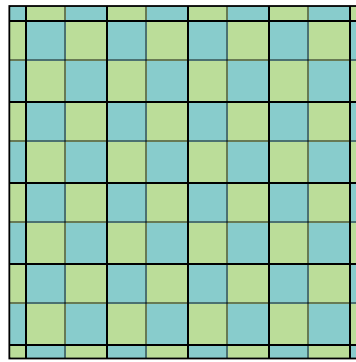


Abbildung 8 Quadratkachelung

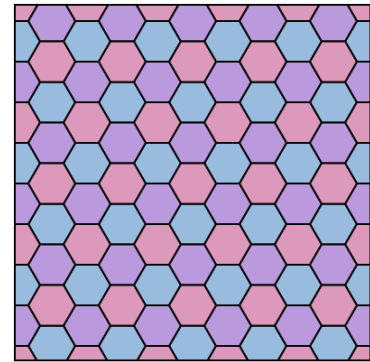


Abbildung 10 Hexagonkachelung

Der Grund, warum es nicht mehr regelmäßige Polygone mit dieser Eigenschaft gibt folgt aus der Tatsache, dass sie die einzigen Polygone mit einem Innenwinkel sind, welcher einen Vollwinkel (360°) in ganzzahlige Teile teilt ($6 \cdot 60^\circ$, $4 \cdot 90^\circ$, $3 \cdot 120^\circ$). Dadurch treffen sich in jedem Eckpunkt genau 6, 4 bzw. 3 regelmäßige Vielecke und schließen dadurch lückenlos ab.

Penrose Kacheln

Penrose-Kachelungen sind eine spezielle Art der Parkettierung, welche mehrere besondere Vielecke verwendet. Sie wurden von dem Mathematiker und Physiker Roger Penrose⁶ entwickelt und ist aufgrund ihrer nicht-periodischen Natur sehr interessant für die Mathematik. Das klassische Penrose-Muster setzt sich aus zwei grundlegenden Bausteinen zusammen:

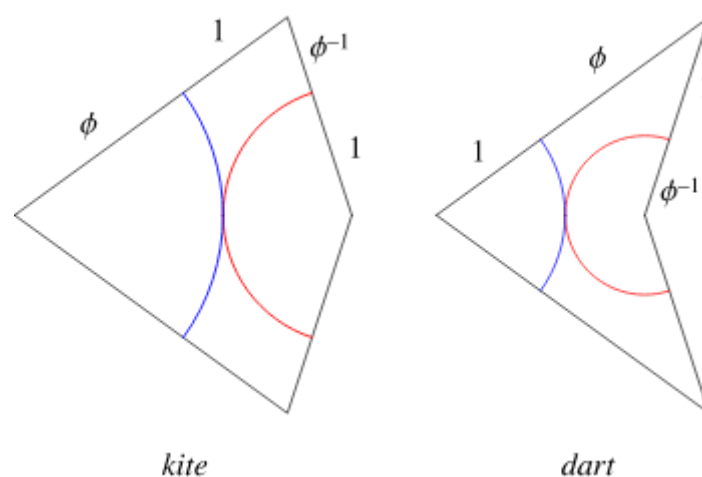


Abbildung 11 Penrose "Drachen" und "Pfeil"

⁵ Von R. A. Nonenmacher - Created by me, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4461460>

⁶ https://de.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose

Das aperiodische Verhalten eines Musters aus diesen Teilen lässt sich mathematisch auf die besonderen Seitenverhältnisse zurückführen. Hier spielt wie so oft in der Geometrie der „Goldene Schnitt“ eine Rolle. Diese Bausteine lassen sich hingegen jeder Intuition trotzdem lückenlos so legen, sodass sie die gesamte unendliche Ebene bedecken.

Solche aperiodischen Muster finden wiederum in Computergrafiken sehr oft Anwendung, da hier auch bei sehr kleinen Skalierungen keine Regelmäßigkeiten erkannt werden können und so die Realität, welche bekanntermaßen auch nie perfekt periodisch ist, viel besser dargestellt werden kann (Behrends, 2019, S. 251–265).

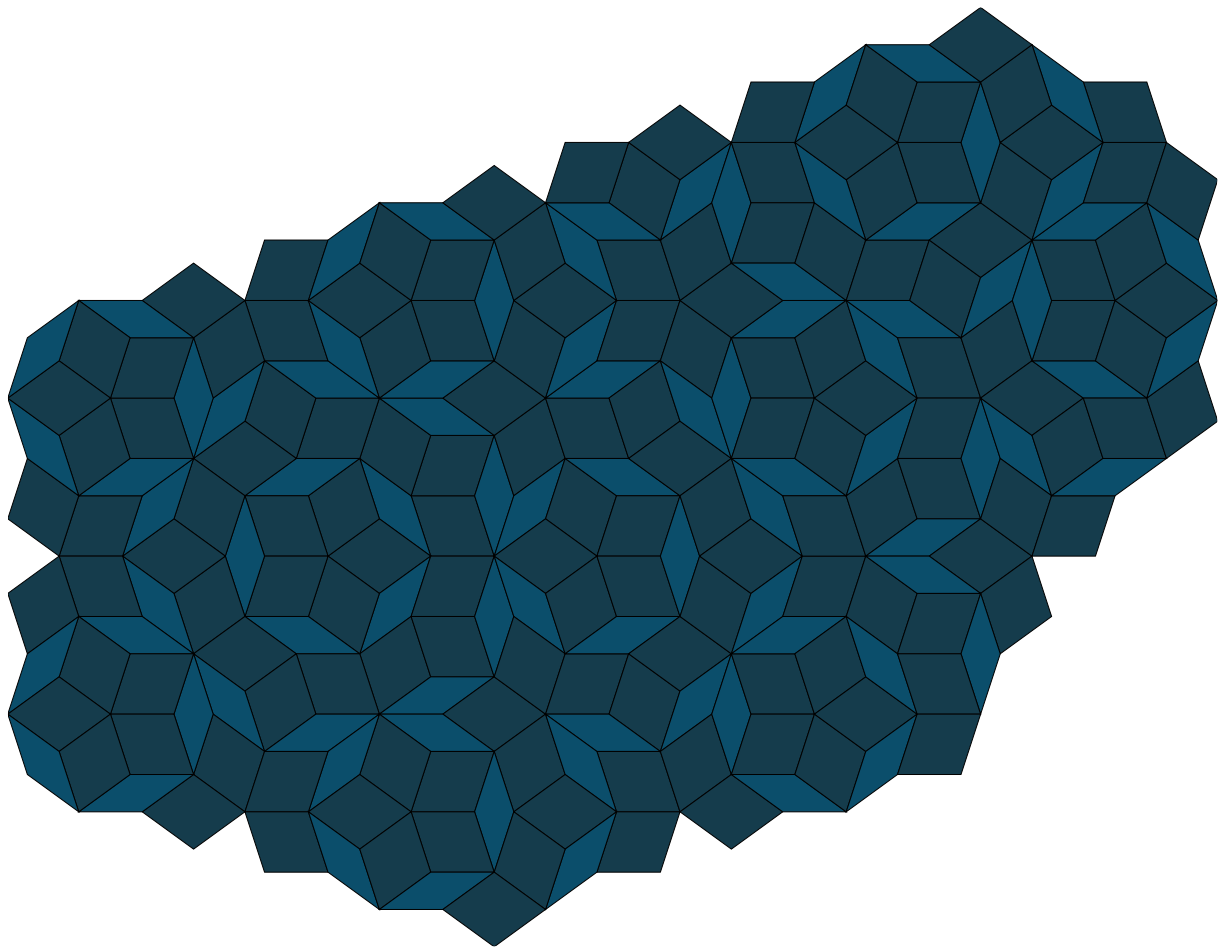


Abbildung 12 Alternative Penrose Kacheln

Aktuelle Durchbrüche und Forschungsstand – Das „Einstein“ Problem

Lange Zeit seit der Veröffentlichung der Penrose-Kacheln stellten sich Mathematiker auf der ganzen Welt die Frage, ob es nicht auch möglich ist, die unendliche Ebene mit nur einer einzigen Kachel aperiodisch zu bedecken. International hat sich der Name für die Suche nach dieser Kachel als ein wissenschaftliches Wortspiel etabliert – Das „Einstein“ Problem (wortwörtlich ein Stein). Im Frühjahr 2023 gelang dem Hobby-Mathematiker

David Smith dann bei persönlichen Spielereien der Durchbruch. Er fand ein Polygon, das zumindest in der Menge, in der er es für sich selbst produziert hatte, eine Ebene aperiodisch zu bedecken. Daraufhin kontaktierte er Mathematiker Craig S. Kaplan, Joseph Samuel Myers und Chaim Goodman-Strauss um seiner Vermutung wissenschaftlich auf den Grund zu gehen. Zusammen mit ihnen konnten sie einen Forschungsprozess in Gang setzen der am Ende zeigte: Smith hatte Recht! (Smith et al., 2023, S. 2)

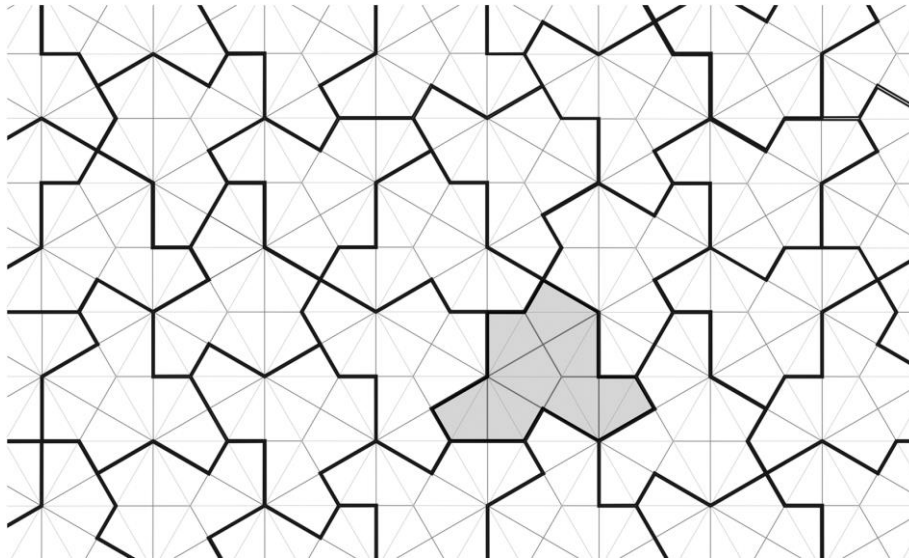


Abbildung 13 Einstein - "Hut"

Einigen Mathematikern war hierbei noch ein Dorn im Auge, dass für die ursprünglich entdeckte Kachel auch die gespiegelte Version des Huts benötigt wird und argumentierten, dass es sich dadurch nicht um eine reine Einstein – Kachelung handelt. Dadurch angeregt fand das Forscherteam ein ganzes Spektrum an Einstein-Kacheln (viele davon jedoch keine Polygone) und in weiterer folge auch eine Kachel, die sich keiner Spiegelung bedienen muss, wodurch nun auch die letzten Gegenstimmen verstummten (Smith et al., 2023, S. 43–45).

Fachdidaktische Bearbeitung des Themas

Thema mit Lehrplanbezug

Beschreibung des Themas für den Schulunterricht

Auf der grundlegendsten Ebene sind Polygone geometrische Figuren, die aus geraden Linien bestehen die in gegebenen Winkeln zu einander stehen. Aus dem Lateinischen übersetzt heißt Polygon so viel wie „viele Winkel“, wird aber im Deutschen meist mit „Vieleck“ übersetzt. Sie dienen dazu, grundlegende Konzepte wie Flächeninhalte, Umfang, Winkel und Symmetrie zu vermitteln und finden so in der Mathematik und besonders der Darstellenden Geometrie Anwendung.

Unterschieden wird hier zwischen regelmäßigen Polygonen, bei denen alle Seiten gleich lang sind und alle Innenwinkel gleich groß sind, welche meist vorrangig behandelt werden und in weiterer Folge als Ausgangspunkt für die Betrachtung von unregelmäßigen Polygonen und anderen geometrischen Figuren verwendet werden. Allgemein wird jedoch jeder geschlossene Streckenzug, der aus mindestens 3 Strecken (bzw. 3 Eckpunkten) besteht, als Polygon bezeichnet.

Die Berechnung von Flächeninhalten von Polygonen ist ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts, da sie die Grundlage für spätere Themen wie Integralrechnung und Flächenberechnung in der Analytischen Geometrie bilden, aber auch in den meisten Arbeitsbereichen ständige Anwendung finden, sollte man keinen weiteren Bildungsweg einschlagen. Hierfür werden Formeln genutzt, die auf den Eigenschaften der jeweiligen (meist regelmäßigen) Figuren basieren.

Die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die geometrischen Figuren Dreieck und Viereck sind von großer Bedeutung, um das Verständnis von Polygonen zu erleichtern und dieses aufbauen zu können. Sie bilden die Grundlage für das Verständnis von Flächeninhalten und Konzepten wie Innen-, Außenwinkeln in Polygonen und tragen somit wesentlich zur Entwicklung des räumlichen Denkens und logischen Verständnisses bei. Hat man diese Inhalte also nicht selbst der jeweiligen Klasse vermittelt, sollte man sich in jedem Fall dessen versichern, dass die Vorkenntnisse vorhanden sind.

Wegen der zentralen Bedeutung dieses Themas, sind Vielecke und der Umgang mit solchen schon lange fest im Lehrplan verankert. Es gibt jedoch auch zahlreiche weitere Felder der Mathematik, die sich mit Polygonen befassen, welche jedoch nicht im Lehrplan der Unterstufe berücksichtigt werden (können), dafür aber teilweise in der Oberstufe

aufgegriffen werden (Riemann Integral) oder aber im akademischen Umfeld (Lineare Algebra und Geometrie).

Bezug auf Lehrplaninhalte

Derzeit wird das Thema „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ in welches unter anderem Dreiecke, Vierecke aber auch regelmäßige Vielecke fallen in der 2. Klasse MS, Vielecke speziell auch noch einmal in der 3. Klasse, behandelt.

Konkret heißt das für das Fach Mathematik:

- Geometrische Figuren und ihre Eigenschaften (z.B. Flächeninhalt, Umfang, Winkel)
- Koordinatensysteme und Funktionen
- Abbildungen und Transformationen
- Symmetrien und Regelmäßigkeiten

Auch in Geometrisch Zeichnen werden automatisch einige der selben Konzepte behandelt, wenn auch diese deswegen nicht so exakt festgelegt sind:

- Ebene Geometrie
- Hauptrisse
- Wahre Längen, wahre Gestalt
- Werkzeichnungen

(BGBl. II Nr. 185/2012/idF 239/2023)

Fachdidaktische Begründung des Themas

Das Thema Vielecke und Geometrie spielt eine zentrale Rolle im Schulunterricht aufgrund seiner vielfältigen Bedeutung für die kognitive Entwicklung der Schülerinnen und Schüler. Polygone mit all ihren geometrischen Besonderheiten fördern so Aspekte geometrischen Denkens wie Raumvorstellung, Mustererkennung, Ästhetik, Symmetrie und viele mehr.

Die Raumvorstellung, als zentraler Forschungsbereich, beinhaltet Fähigkeiten wie visuo-motorische Koordination, Figur-Grund-Unterscheidung, räumliche Orientierung und visuelles Gedächtnis. Die Psychologie betrachtet Raumvorstellung als wesentlichen Bestandteil von Intelligenz und untersucht sie eingehend. Der Geometrieunterricht

ermöglicht nicht nur die Entwicklung dieser Fähigkeiten, sondern auch die Anwendung von Strategien beim Lösen räumlich-geometrischer Aufgaben. (Bruder et al., 2015, S. 193–196)

Die Erlernbarkeit von Raumvorstellungsvermögen wird durch zahlreiche Studien belegt, die zeigen, dass räumliches Vorstellungsvermögen trainierbar ist. Jedoch weisen Untersuchungen darauf hin, dass die Förderung von räumlichen Kompetenzen effektiver ist, wenn Trainings- und Testaufgaben in einem engen inhaltlichen Zusammenhang stehen.

Insgesamt trägt der Geometrieunterricht, insbesondere im Kontext von Vielecken und anderen geometrischen Formen, maßgeblich zur kognitiven Entwicklung von Schülerinnen und Schülern bei. Durch die Förderung von Raumvorstellung und anderen Aspekten geometrischen Denkens legt er eine wichtige Grundlage für das Verständnis abstrakterer mathematischer Konzepte und fördert zugleich die Fähigkeiten zur Problemlösung und zum logischen Argumentieren. (Bruder et al., 2015, S. 196–201)

Grundbildungsaspekte und Lernziele

<i>Inhalt/Fertigkeit</i>	<i>Dafür notwendiges Wissen und Können</i>
<i>Umgang mit mathematischen Formeln</i>	Nennen und korrektes Anwenden der Flächen- und Umfangsformeln bekannter Figuren
<i>Umgang mit mathematischen Figuren</i>	Konstruieren, Beschriften und Erkennen bekannter Figuren in zusammengesetzten Figuren
<i>Vernetzung mathematischer Teilgebiete</i>	Herleitung der Flächenformel einer zusammengesetzten Figur aus den Flächenformeln bekannter Figuren
<i>Beherrschung mathematischer Fachbegriffe</i>	Korrekte Verwendung der Begriffe „regelmäßig“, „konkav“, „konvex“

Tabelle 1 Grundbildungsaspekte

Daraus abgeleitet kann man folgende Lernziele formulieren:

- Die Schülerinnen und Schüler können die Eigenschaften von Vielecken identifizieren, wie zum Beispiel die Anzahl der Seiten, die Länge der Seiten und die Größe der Innenwinkel.
- Die Schülerinnen und Schüler können die Flächenformeln bekannter Vielecken nennen und korrekt anwenden.
- Die Schülerinnen und Schüler können die Herleitung des Flächeninhalts von zusammengesetzten Vielecken begründen.
- Die Schülerinnen und Schüler können Flächenberechnungen von Vielecken durchführen.
- Die Schülerinnen und Schüler können Textaufgaben zum Thema Vielecke bearbeiten und lösen.
- Die Schülerinnen und Schüler können den Unterschied zwischen regelmäßigen und unregelmäßigen Vielecken erklären und begründen.

Angestrebte Kompetenzen

Das Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (IQS, 2009) definiert für die Einordnung der Themen im Unterrichtsfach Mathematik ein mehrdimensionales Modell. So wird jedem Thema ein Paar (z.B. (AK2, IK4)) zugewiesen, man bekommt dadurch eine bessere Übersicht über die Abdeckung aller Themenbereiche und Operatoren.

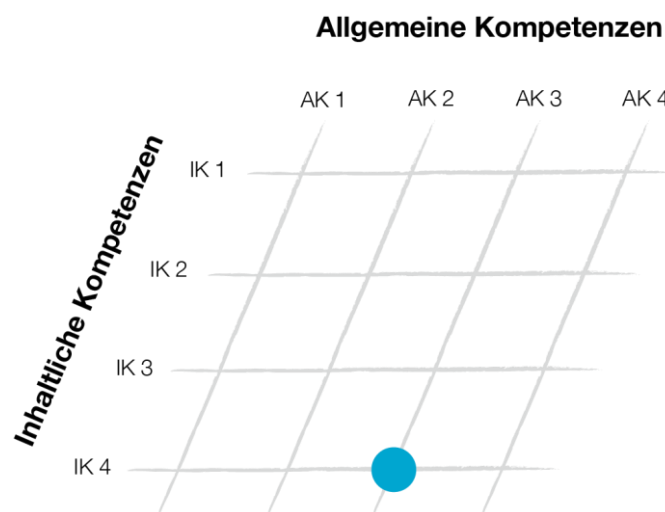


Abbildung 14 Kompetenzmodell Darstellung

Allgemeine Kompetenzen	Inhaltliche Kompetenzen
AK1: Modellieren	IK1: Arbeiten mit Zahlen
AK2: Operieren	IK2: Arbeiten mit Operationen
AK3: Kommunizieren	IK3: Arbeiten mit Größen
AK4: Problemlösen	IK4: Arbeiten mit Ebene und Raum

Tabelle 2 Kompetenzmodell Auflistung

Mit dem Themenbereich Vielecke und geometrische Figuren werden dabei die Kompetenzbereiche (AK1, IK4) für alle Konstruktionen und (AK2, IK3) für alle Berechnungen zu Umfang und Flächeninhalt abgedeckt.

Berücksichtigung Lernausgangslage

Leistungsstand

Da Geometrie als Themenblock so essentiell für den Mathematikunterricht ist, muss für alle Schülerinnen und Schüler ein gewisses, wenn auch nicht sehr anspruchsvolles kognitives Level gegeben sein. Hierbei handelt es sich um ein allgemeines Verständnis der euklidischen Geometrie, genauer derjenigen im zweidimensionalen Raum. Zu diesem Zeitpunkt sollte dies aber bei den allermeisten Lernenden mehr als erfüllt sein.

Vorkenntnisse

Die Berücksichtigung der Vorkenntnisse der Lernenden ist einer der zentralen Punkte für einen leistungsdifferenzierten Unterricht. Gemeinsam mit den anthropologischen (physischen, psychischen) Voraussetzungen bilden diese die Basis für eine wissenschaftlich basierte Einschätzung (Kiel, 2018, S. 23). Um mit dem Thema Vielecke im Mathematikunterricht zu beginnen, sind bestimmte Vorkenntnisse bei den Schülerinnen und Schülern erforderlich. Zunächst müssen sie in der Lage sein, bekannte geometrische Figuren zu erkennen und zu beschreiben, indem sie ihre Eigenschaften, wie zum Beispiel die Anzahl der Seiten, die Länge der Seiten und die Größe der Innenwinkel, identifizieren – das beschränkt sich zu diesem Zeitpunkt ohnehin nur auf Dreieck und Viereck. Sie müssen auch

in der Lage sein, geometrische Grundstrukturen skizzieren und konstruieren zu können. Zudem sollten die Schülerinnen und Schüler über grundlegende Kenntnisse in Bezug auf Flächenberechnungen verfügen und in der Lage sein, Flächenformeln bekannter Figuren anzuwenden. Darüber hinaus sollten sie in der Lage sein, Begriffe wie "regelmäßig" und "unregelmäßig" zu verstehen und zu unterscheiden, um sie später im Kontext der Vielecke zu verknüpfen. Besonders hier kann es sich lohnen, einen gewissen Fokus zu setzen, um bspw. das sprachliche Verständnis für solche Fachbegriffe zu stärken und mit der Alltagssprache der Kinder zu vergleichen und vernetzen (Maier & Schweiger, 1999, S. 147–151). Wenn die Schülerinnen und Schüler diese kognitiven Leistungen erbringen, sind sie in der Lage, mit dem Thema Vielecke im Mathematikunterricht zu beginnen.

Weitere Überlegungen

Eine wichtige Überlegung bei der Gestaltung von Unterricht zum Thema Vielecke ist die Alltagstauglichkeit und der Realitätsbezug. Es ist wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler das Gelernte auf praktische Anwendungen übertragen können und verstehen, wie das Thema im Alltag relevant sein könnte. Eine Möglichkeit, dies zu erreichen, ist die Verwendung von Beispielen aus dem Alltag, also etwa die Berechnung des Flächeninhalts von Raumplanungen oder die Berechnung vom Materialbedarf beim Bau von Gebäuden.

Eine weitere Überlegung ist die Ausstattung der Bildungsräume. Um das Thema Vielecke effektiv zu vermitteln, sollten die Schülerinnen und Schüler Zugang zu geometrischen Werkzeugen und Hilfsmitteln wie Linealen, Winkelmessern, Geodreiecken und Zirkeln haben. Hier besteht oft weniger ein Problem bei den SuS, es kommt aber immer öfter vor, dass in den Klassenzimmern keine echten Tafelzirkel oder Lineale mehr vorkommen. Das mag im Bezug auf die Digitalisierung sinnvoll sein, jedoch sollte man sich hier als Lehrperson bewusst sein, dass sich so das Erlernen des richtigen Umgangs mit den Werkzeugen bei den Schülerinnen und Schülern als schwieriger erweist.

Unterrichtsplanung

Einordnung ins Schuljahr

Polygone sind Teil der Elementaren Geometrie und der damit eingeführten 2D-Objekte. In den meisten Schulbüchern wird die Geometrie durch alle Schulstufen hindurch als sehr gesondertes Thema betrachtet. Es steht einem als Lehrperson dadurch frei, wann man dieses ansprechen will. Die inhaltlichen Voraussetzungen für Vielecke (Strecke, Strahl, Gerade, Winkel, ...) geben jedoch einen gewissen Ablaufrahmen vor, den man einhalten muss, um inhaltlich kohärent zu bleiben. Als Beispiel für diese Unterrichtsplanung wird das Thema hinter den ersten großen behandelten Block der 2. Klasse gestellt: Die Bruchrechnung. Somit befinden wir uns ca. 8 Wochen vor Ende des ersten Semesters und haben hier Zeit, alle gewünschten Themen der Geometrie anzusprechen.

Ausblick auf folgende Lehrinhalte

Obwohl das Thema Vielecke im Fach Mathematik oft als Abschluss eines Themenblocks gesehen wird, gibt es darüber hinaus in Geometrisch Zeichnen aber auch in höheren Klassen in Mathematik Themen, die auf dieses Wissen aufbauen. Am wichtigsten zu betrachten im Kontext der NMS ist hier das Thema „Haupttrisse“, da hier dreidimensionale Objekte auf Polygone abgebildet werden, unter Berücksichtigung der dabei entstehenden Winkel und Seitenlängen.

Rasterplanung

Schule / Klasse / Schülerzahl: Mittelschule, 2. Klasse, (13m, 9w)

Raumsituation: Regulärer Klassenraum, Geometrische Ausstattung für Tafel, Beamer

Sprachniveau: Unterrichtssprache Deutsch, deutliche Aussprache notwendig

Thema der Stunde: 2D-Objekte, Vielecke

THEMA	STUNDENANZAHL	KONKRETE INHALTE	LEHRME- THODE und SOZIAL- FORM	BENÖTIGTE MATERIALIEN / ANMERKUNGEN	Allgemeine / Inhaltliche - KOMPETENZ ⁷
Wiederholung	4	• Wiederholen der Begriffe <i>Winkel, Rechteck, Dreieck, Diagonale, parallel, normal</i> • Eigenschaften Dreieck, Viereck • Konstruktionsübungen zu Dreieck und Viereck • Berechnung Umfang Fläche	Brainstorming Einzelarbeit	• Heft • Konstruktionswerkzeuge (Zirkel, Geodreieck, Bleistift, Radiergummi)	AK1, IK4
Haus der Vierecke	8	• Begriffe <i>Trapez, Deltoid, Raute, Parallelogramm</i> einführen • Eigenschaften besonderer Vierecke • „Haus der Vierecke“ einführen • Symmetrieachsen • Konstruktionsübungen	Plenumsge- spräch Einzelarbeit	• Heft • Arbeitsbuch • Konstruktionswerkzeuge	AK1, IK4
Flächen	4	• Flächenformeln Dreieck, Viereck wiederholen • Einführung Flächenformeln besonderer Vierecke • Flächenberechnungen	Plenumsge- spräch Gemeinsames Erarbeiten	• Heft • Arbeitsbuch	AK2, IK3
Vielecke	8	• Flächeninhalt zusammengesetzter Figuren • Einführung regelmäßige Vielecke • Eigenschaften regelmäßiger Vielecke • Zerlegung von Vielecken • Periodische Parkettierung	Plenumsge- spräch Einzelarbeit	• Heft • Arbeitsbuch • Beispielhafte Aufgaben siehe <i>Anhang</i>	AK1, IK4, AK2, IK3

⁷ Legende im Abschnitt Angestrebte Kompetenzen

Zusammenfassung

Das Thema Polygone ist im Mathematikunterricht fest verankert, damit einhergehend werden grundlegende Bildungsaspekte und Lernziele vermittelt. In den meisten Schulbüchern herrscht hier der Konsens, auf regelmäßige Polygone Fokus zu legen. Regelmäßige Polygone haben Seiten gleicher Länge und Winkel gleicher Größe. Zu den speziellen Polygonen zählen Sternvielecke, die sich gegenseitig schneidende Seiten haben, sowie Polygone, die sich ohne Lücken oder Überlappungen zu einer Ebene füllen lassen (Parkettierung). Der Flächeninhalt von Polygonen kann berechnet werden, indem sie in einfachere Formen zerlegt und die Flächenformeln dieser Formen verwendet werden. Das Konzept des Kachelns, also dem Bedecken einer Ebene mit wiederkehrenden Mustern von Polygonen, ist in der wissenschaftlichen Forschung dabei gerade heiß beredet. Neuste Entdeckungen zeigen die Möglichkeit, mit nur einer Art von Polygon die gesamte unendliche Ebene zu bedecken, ohne dass sich das Muster je wiederholt. Das Thema Polygone ist also sowohl im Schulunterricht, als auch in der Forschung höchst interessant.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Klassifizierung Polygon	2
Abbildung 2 Museumswächter Problem	3
Abbildung 3 Kreisteilung mit Einheitswurzeln	5
Abbildung 4 3D-Sechseck	6
Abbildung 5 Regelmäßige 2k-Polygone	6
Abbildung 6 Regelmäßige "Achtzack"	6
Abbildung 7 Regelmäßiger "Fünfzack"	6
Abbildung 8 Quadratkachelung	8
Abbildung 9 Gleichseitige Dreieckskachelung	8
Abbildung 10 Hexagonkachelung	8
Abbildung 11 Penrose "Drachen" und "Pfeil"	8
Abbildung 12 Alternative Penrose Kacheln	9
Abbildung 13 Einstein - "Hut"	10
Abbildung 14 Kompetenzmodell Darstellung	14

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Grundbildungsaspekte	13
Tabelle 2 Kompetenzmodell Auflistung	15

Literaturverzeichnis

- Achleitner, R., Klampfer, A. & Weikinger, M. (2020). *ganz klar: Mathematik 2: Übungsbuch mit Kompetenzchecks*. Jugend & Volk, westermann. <https://perma-link.obvsg.at/AC16048407>
- Behrends, E. (2019). *Parkettierungen der Ebene: Von Escher über Möbius zu Penrose*. Springer eBook Collection. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-23270-2>
- Berg, M. T. de. (2008). *Computational geometry: Algorithms and applications* (3. ed.). Springer. http://digitale-objekte.hbz-nrw.de/webclient/DeliveryManager?pid=2346716&custom_att_2=simple_viewer
- Bewersdorff, J. (2019). *Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie* (6. Auflage). Lehrbuch. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-26152-8>
- Boxhofer, E., Huber, F., Lischka, U. & Panhuber-Mayr, B. (2013). *mathematiX 2*. VERITAS Linz.
- Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.). (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer Spektrum. <http://bookview.libreka.de/retailer/urlResolver.do?id=9783642351181&re-tid=100024> <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8>
- Frank, R. & Schumann, H. (2019). *Über „regelmäßige“ räumliche Polygone*. <https://doi.org/10.25598/ibdg/2019-2-10>
- IQS. (2009). *Grundlagen der Bildungsstandards: Kompetenzmodelle und Deskriptoren*. Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen. <https://www.iqs.gv.at/themen/nationale-kompetenzerhebung/grundlagen-der-nationalen-kompetenzerhebung/grundlagen-der-bildungsstandards#:~:text=und%20der%20IKM-,Tabelle,-Allgemeine%20Kompetenzen>
- Kiel, E. (Hrsg.). (2018). *utb Schulpädagogik: Bd. 3090. Unterricht sehen, analysieren, gestalten* (3., überarbeitete Auflage). Verlag Julius Klinkhardt.
- Kölblinger, S. & Stichlberger Ursula. (2013). *Mach mit Mathematik 2* (1. Aufl.). Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache: Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht* (1. Aufl.). *Mathematik für Schule und Praxis: Bd. 4*. ÖBV&HPT Verlagsges.

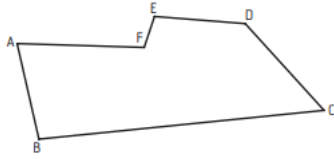
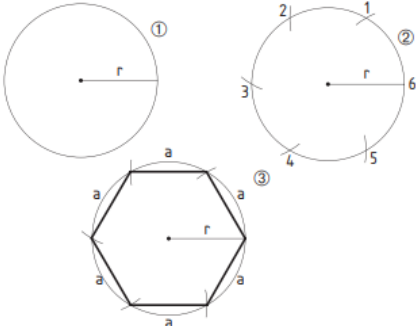
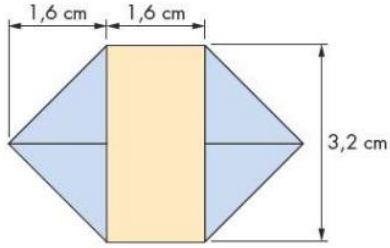
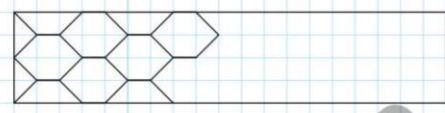
Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne der Mittelschulen, Fassung vom 28.12.2023 idF 239/2023). <https://www.ris.bka.gv.at/Geltende-Fassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850>

Smith, D., Myers, J. S., Kaplan, C. S. & Goodman-Strauss, C. (2023). *An aperiodic monotile*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.10798>

Strick, H. K. (2019). *Mathematik Ist Schön: Anregungen Zum Anschauen und Erforschen Für Menschen Zwischen 9 und 99 Jahren* (2., erweiterte und korrigierte Auflage). Springer. <https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=5842296>

Anhang

A1 - Grundaufgaben

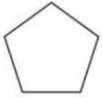
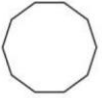
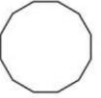
Nr.	Inhalt	Bild
1	Konstruieren	Zeichne ein unregelmäßiges Vieleck. a) ein Fünfeck b) ein Sechseck c) ein Siebeneck d) ein Achteck Es gibt regelmäßige und unregelmäßige Vielecke. Sie werden nach der Anzahl ihrer Ecken benannt. ZB: 
2	Konstruieren	Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck. $a = 3 \text{ cm}$ Gehe so vor: 1) Zeichne einen Kreis mit $r = 3 \text{ cm}$. 2) Trage den Radius sechsmal auf der Kreislinie auf. 3) Verbinde die Schnittpunkte und beschrifte sie. a) $a = 4,5 \text{ cm}$ b) $a = 3,7 \text{ cm}$ c) $a = 5 \text{ cm}$ d) $a = 2,5 \text{ cm}$ 
3	Berechnung	Berechne den Flächeninhalt der zusammengesetzten Figuren: a)  b) 
4	Konstruieren	Setze die Parkettierung (Aneinanderreihung der Sechsecke) in der Abbildung fort!  Versuche gleichschenklige Trapeze lückenlos aneinanderzureihen (= parkettieren)! 

⁸ Kölblinger und Stichtberger Ursula (2013)

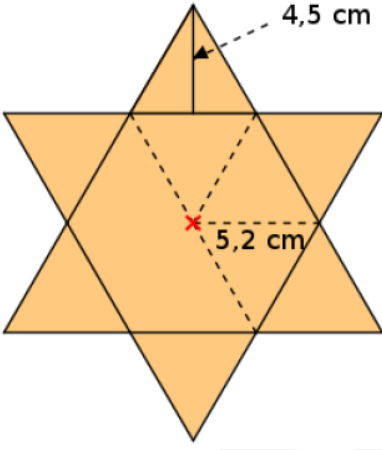
⁹ Kölblinger und Stichtberger Ursula (2013)

¹⁰ Boxhofer et al. (2013)

¹¹ Achleitner et al. (2020)

5	Konstruieren	Zerlege die Flächen mithilfe ihrer Diagonalen in Dreiecke! a) Fünfeck  b) Siebeneck  c) Zehneck  d) Zwölfeck  835 12
---	--------------	---

A2 – Erweiterungsaufgaben

Nr.	Inhalt	Bild
1	Konstruieren	Versuche ein regelmäßiges Achteck zu konstruieren. Gehe so vor: 1) Beginne mit einem Kreis. 2) Teile ihn in vier gleiche Teile. 3) Halbiere die Viertel und verbinde die Schnittpunkte an der Kreislinie.  13
2	Konstruieren	Zeichne einen Kreis mit dem Radius 8 cm. Zeichne a) ein regelmäßiges Neuneck, b) ein regelmäßiges Zehneck, das dem Kreis eingeschrieben ist. 14
3	Berechnung	Aufgabe 8: Trage den Flächeninhalt des Sterns ein.  Antwort: Der Stern hat einen Flächeninhalt von cm². 15

¹³ Kölblinger und Stichlberger Ursula (2013)

¹⁴ Kölblinger und Stichlberger Ursula (2013)

¹⁵ https://gpogo.weebly.com/uploads/9/3/6/4/9364270/zusammengesetzte_fleichen.pdf